Anales de la Real Academia de Doctores
Volumen 3, pp. 143-156, 1999

UN NUEVO PROCEDIMIENTO PARA LA DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA EN LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES *

FRANCISCO JAVIER DÍAZ-LLANOS Y SAINZ-CALLEJA

Resumen

En el marco del tema de procedimientos de muestreo nos hemos centrado en el cálculo del tamaño de la muestra mediante métodos tradicionales. Dentro de estos métodos, hemos introducido la novedad de encontrar unas formulaciónes que nos permiten determinar el tamaño de una muestra aleatoria simple y a posteriori una regla general de decisión cuando realizamos un test de hipótesis simple conjunto para los parámetros asociados a la **Ley de LAPLACE-GAUSS [Karl PEARSON: ley normal** (1893), **KRAMP: tablas de la ley normal** (1899)]

Introducción

Durante un dilatado período de tiempo hemos estado en contacto con investigadores de ciencias experimentales y comprobamos que éstos se preguntaban casi sin cesar la eterna pregunta: «**¿cuál deberá ser el tamaño de la muestra para que mis ensayos fueran lo más representativos posible?**».Por lo general, para contestar a esta pregunta aplicaban directamente las fórmulas contempladas en los libros de Estadística en los casos de un test de hipótesis simple para los parámetros media y varianza poblacional, de forma separada, asociados a la **Ley de LAPLACE-GAUSS**. Cuando realizaban un test de hipótesis simple, tanto para la media como para la varianza poblacional, tenían que disponer de alguna referencia sobre la varianza y la media poblacional, respectivamente. Sin embargo, para dar un valor a priori a estos parámetros, en ocasiones, resulta bastante comprometido por la falta de conocimiento que se tiene acerca de ellos. Por lo tanto, los resultados que obtenían no reflejaban, en modo alguno, todo el interés que ellos deseaban. A raíz de esta forma de proceder, supusimos que los resultados que obtendrán serán aún de mayor interés si en lugar de realizar un test de hipótesis simple por separado —bajo una suposición un poco aventurada para los parámetros de la población— lo hicieran de forma conjunta. Sin duda alguna, su

* Conferencia pronunciada el 9 de diciembre de 1998.

procedimiento presentaba un grave inconveniente a nivel operativo, ya que revisando la bibliografía de Estadística no encontramos en ningún libro las fórmulas adecuadas para aplicar en este caso concreto. Por esta razón, empezamos a investigar este tema que supone un enorme interés en las ciencias experimentales.

Después de documentarnos adecuadamente, comenzamos a investigar sobre este tema con el fin de encontrar las formulaciones adecuadas.

Finalmente, tras un largo período de tiempo, encontramos las formulaciones que nos permitían el cálculo del tamaño de la muestra no sólo mediante un procedimiento aproximado, sino también exacto y las introducimos en el libro titulado: «Formulaciones de interés en la estadística aplicada» [9].

Mientras que el procedimiento aproximado no contemplaba ningún problema a nivel operativo ya que hacia uso de la variable aleatoria χ^2 [Helmert (1876), Karl PEARSON: **test de la χ^2** (1900)], el procedimiento exacto si lo presentaba ya que hacía uso de la variable aleatoria **χ^2 no-centrada.**

Decimos que sí lo contemplaba puesto que dicha ditribución no se encontraba recogida en el software estadístico más difundido en el mercado español. Nos referimos al paquete de programas Statgraphis. Plus (para Windows) e incluso el SPSS 7.5.2 (versión en castellano para Windows 95 y Windows NT).

Sabemos que entre los 19 módulos de la última versión del mencionado SPSS se encuentra uno titulado «Sample Power», que precisamente nos permite determinar el tamaño de la muestra para la investigación antes de que los datos sean recogidos. No obstante, por desgracia,no incluye nuestro caso concreto.

Sin embargo, buscando en la bibliografía francesa hallamos un paquete de programas **ad hoc** para las **distribuciones (PAC)** [18]. Ni que decir tiene, que en dicho paquete de programas si se encontraba la distribución **χ^2 no-centrada**. Por consiguiente, nos dispusimos a pedirlo para proceder a su estudio. Luego una vez que ya sabiamos manejarlo, el cálculo del tamaño de la muestra, desde un punto de vista operativo, para nuestro caso concreto era ya pura rutina.

PROCEDIMIENTO

En primer lugar, mostraremos un procedimiento para la determinación del **tamaño de la muestra** y, en segundo lugar, propondremos una **regla general de decisión**, que nos permitirá decidir si aceptamos o rechazamos la **hipótesis nula** que vayamos a someter a un test de hipótesis simple fruto de las restricciones resultantes de la toma en consideración de determinadas verificaciones empíricas.

En nuestro caso en concreto, la hipótesis nula la presentaremos de la siguiente manera:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$\sigma^2 = \sigma_0^2$$

Por otra parte, dado que toda hipótesis nula debe ir acompañada de su contra hipótesis:(hipótesis alternativa), el investigador deberá formularla a su vez de una de las dos maneras que mostramos a continuación:

$$H_1 : \mu = \mu_1$$
$$\sigma^2 = \sigma_1^2$$
$$\mu_o > \mu_1, \quad \sigma_o^2 > \sigma_1^2$$

o bien

$$H_1 : \mu = \mu_1$$
$$\sigma^2 = \sigma_1^2$$
$$\mu_o < \mu_1, \quad \sigma_o^2 < \sigma_1^2$$

Una vez establecidas las hipótesis asociadas a los parámetros de la **Ley de LAPLACE-GAUSS**, en primer lugar, el investigador deberá tomar la decisión, en su experimentación concreta, no sólo de cual va a ser el **nivel de significación** que elija, es decir, el **umbral crítico de decisión** a partir del cual aceptaremos o rechazaremos la hipótesis nula, sino también de la **potencia del test**. En segundo lugar, nos disponemos a extraer una muestra aleatoria simple de tamaño pequeño, para verificar si la muestra es compatible con la hipótesis nula.

Teniendo en cuenta todas las **hipótesis** establecidas, tanto **no distribucionales** como **distribucionales**, deduciremos aquellas fórmulas que nos permitirán responder a los dos puntos claves de esta ponencia: el **tamaño de la muestra** y la **regla general de decisión,** bajo las dos situaciones hipotéticas que ya hemos mencionado.

Pero antes de abordar el tema del tamaño de la muestra en el caso que nos ocupa vamos a recordar que forma tenian las formulaciones de partida del **nivel de significación** y de la **potencia del test** para el cálculo del tamaño de la muestra en las dos situaciones siguientes:

Primera: Cálculo del tamaño de la muestra

Situación hipotética

$$H_o : \mu = \mu_o$$

$$H_1 : \mu = \mu_1$$

$$\mu_o > \mu_1$$

$$\sigma^2 : conocido$$

Las formulaciones que proponemos para expresar la forma que adoptan, tanto en el **nivel de significación** como en la **potencia del test** son las siguientes:

$$\alpha_I = P\left(\overline{X}_n \leq K^I(\alpha_I)/\mu = \mu_o\right)$$

$$\eta = P\left(\overline{X}_n \leq K^I(\alpha_I)/\mu = \mu_I\right)$$

El tamaño de la muestra se obtendrá igualando los **umbrales críticos de decisión** contenidos en ambas fórmulas. Si operamos de forma conveniente nos da:

$$n = \frac{\sigma^2\left[\overset{-1}{F}_{LG(0,1)}(\eta) - \overset{-1}{F}_{LG(0,1)}(\alpha_1)\right]^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

Segunda. Cálculo del tamaño de la muestra

Situación hipotética

$$H_o : \sigma^2 = \sigma_o^2$$

$$H_I : \sigma^2 = \sigma_I^2$$

$$\sigma_o^2 > \sigma_I^2$$

$$\mu : conocido$$

Las formulaciones que proponemos para expresar la forma que adopta tanto en el **nivel de significación** como la en **potencia del test,** son las que siguen a continuación:

$$\alpha_1 = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - \mu)^2}{n} \leq K^I(\alpha_1)/\sigma^2 = \sigma_0^2\right)$$

$$\eta = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - \mu)^2}{n} \leq K^I(\alpha_1)/\sigma^2 = \sigma_1^2\right)$$

El tamaño de la muestra se obtendrá igualando los **umbrales críticos de decisión** contenidos en ambas fórmulas. Operando de forma conveniente resulta:

$$\frac{\sigma_o^2}{\sigma_1^2} = \frac{\overset{-1}{F}_{\chi_n^2}(\eta)}{\overset{-1}{F}_{\chi_n^2}(\alpha_1)}$$

Tomaremos aquel n que verifique lo máximo posible esta relación

PRIMERA SITUACIÓN HIPOTÉTICA

1. DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

Es razonable pensar que así como la variable aleatoria contenida, tanto en el **nivel de significación** como en la **potencia del test,** para las dos situaciones que acabamos de mostrar se fijaba mediante la aplicación del **lema de Jerzy NEYMAN-Egon PEARSON**, en nuestro caso concreto, procederemos de la misma manera. El punto de partida para la construcción de la **mejor región crítica** es el siguiente:

$$\frac{L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu_o, \sigma_o^2\right)}{L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu_1, \sigma_1^2\right)} \leq K_*(\alpha_1)$$

Ahora si construimos las **funciones de verosimilitud asociadas a la hipótesis nula y a la hipótesis alternativa** para nuestro caso concreto y operamos de forma adecuada, llegamos a la **mejor región crítica,** que adopta la siguiente forma:

$$\text{Si } s_n^2 + (\bar{x}_n + \Delta_1)^2 \leq \frac{\left(\frac{2}{n}\right)\log_e K_*(\alpha_1) - \log_e\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)}{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)} + \Delta_1^2 - \delta_1 \text{ se acepta } H_1$$

$$\text{Si } s_n^2 + (\bar{x}_n + \Delta_1)^2 \geq \frac{\left(\frac{2}{n}\right)\log_e K_*(\alpha_1) - \log_e\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)}{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)} + \Delta_1^2 - \delta_1 \text{ se acepta } H_0$$

en donde:

$$\Delta_1 = \frac{\mu_0\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_0^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}$$

$$\delta_1 = \frac{\mu_1^2\sigma_0^2 - \mu_0^2\sigma_1^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}$$

Por lo tanto, las fórmulas de partida, tanto para el **nivel de significación** como para la **potencia del test,** son las que presentamos a continuación:

$$\alpha_1 = P\left[\left(S_n^2 + (\overline{X}_n + \Delta_1)^2\right) \leq K^I(\alpha_1) / \mu = \mu_o, \sigma^2 = \sigma_o^2\right]$$

$$\eta = P\left[\left(S_n^2 + (\overline{X}_n + \Delta_1)^2\right) \leq K^I(\alpha_1) / \mu = \mu_1, \sigma^2 = \sigma_1^2\right]$$

Ante esta situación, antes de igualar los **umbrales críticos de decisión** contenidos en estas dos fórmulas con el fin de llegar a una expresión analítica que nos permita el cálculo del tamaño de la muestra, hemos de identificar la variable aleatoria contenidas, en estas dos fórmulas.

Así como en las dos situaciones ya mencionadas está claro que el **umbral crítico de decisión** va a depender de la función inversa de la función de distribución de la variable aleatoria de **LAPLACE-GAUSS [0,1] para un área concreta** y de la función inversa de la función de distribución de la variable aleatoria **χ^2 de Helmert** con n grados de libertad **para un area concreta**, en nuestro caso, no está tan claro cuál va a ser la ley de probabilidad que utilizaremos.

De la mera observación de la variable aleatoria contenida en la expresión probabilística que define el **nivel de significación,** resulta razonable pensar que podría tratarse de la **χ^2 no-centrada**, aunque tal como está definida no se identifica en ninguno de los libros que contempla la extensa bibliografía que hemos consultado. Así pues, en este caso concreto, procederemos a la realización de un conjunto de transformaciones que tengan cierto sentido, en base a las que se hacen en las dos situaciones ya aludidas en dicha expresión probabilística.

Dichas transformaciones que se contemplan a lo largo del desarrollo que mostramos a continuación nos permitirán hacer uso de los resultados ya conocidos tales como:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow LG(0,1)$$

$$\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2} \hookrightarrow \chi_{n-1}^2$$

$$P\left[\left(S_n^2 + (\overline{X}_n + \Delta_1)^2\right) \leq K^I(\alpha_1) / \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2\right] =$$

$$= P\left[\frac{n}{\sigma_0^2}\left(S_n^2 + (\overline{X}_n - \mu_0 + \mu_0 + \Delta_1)^2\right) \leq \frac{nK^I(\alpha_1)}{\sigma_0^2}\right] =$$

$$= P\left[\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2} + \left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} + \frac{\Delta_1 + \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right)^2 \leq \frac{nK^I(\alpha_1)}{\sigma_0^2}\right] =$$

$$= P\left[\chi_{n-1}^2 + \left(LG(0,1) + \frac{\Delta_1 + \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right)^2 \leq \frac{nK^I(\alpha_1)}{\sigma_0^2}\right]$$

Entre las cinco definiciones equivalentes de la χ^2 **no-centrada** que figuran en la extensa bibliografía que disponemos, una de ellas contemplada en el libro del profesor DACUHNA-CASTELLE [7] se adapta a la que hemos deducido. Por consiguiente, ya estamos en condiciones de poder continuar hasta deducir el **umbral crítico de decisión** tal como vemos a continuación:

$$P\left[\chi_{n-1}^2 + \left(LG(0,1) + \frac{\Delta_1 + \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right)^2 \leq \frac{nK^I(\alpha_1)}{\sigma_0^2}\right] =$$

$$= P\left[\chi_{n;\lambda}^2 \leq \frac{nK^I(\alpha_1)}{\sigma_0^2}\right] = F_{\chi_{n;\lambda}^2}\left(\frac{nK^I(\alpha_1)}{\sigma_0^2}\right)$$

Por lo consiguiente, el **nivel de significación** adopta, en nuestro caso concreto, la siguiente forma:

$$\alpha_1 = F_{\chi_{n;\lambda}^2}\left(\frac{nK^I(\alpha_1)}{\sigma_0^2}\right)$$

Luego, con el fin de obtener una expresión analítica para el cálculo del **umbral crítico de decisión** tendremos que pre-multiplicar ambos miembros de esta igualdad por la función inversa de la función de distribución de la variable aleatoria χ^2 **no-centrada.**

A partir de lo cual se deduce el siguiente resultado:

$$K^I(\alpha_1) = \frac{\sigma_0^2}{n} \overset{-1}{F}_{\chi_{n;\lambda}^2}(\alpha_1)$$

Dado que las transformaciones que tienen cierto sentido dentro de la expresión probabilística asociada a la **potencia del test** son las mismas que en el primer caso, las omitimos; y por consiguiente, nos limitaremos a mostrar la fórmula final que nos permita calcular el **umbral crítico de decisión** en función de la función inversa de la función de distribución de la variable aleatoria χ^2 **no-centrada** para un area concreto (**potencia del test**).

$$K^{I}(\alpha_1)=\frac{\sigma_1^2}{n}\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(\eta)$$

Por último, igualando los dos **umbrales críticos de decisión** obtenido mediante las fórmulas definidas por el **nivel de significación** y la **potencia del test** llegamos, sin dificultad, a la fórmula que nos permite el cálculo del **tamaño de la muestra:**

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}=\frac{\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(\eta)}{\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(\alpha_1)}$$

Tomaremos aquel n que verifique lo máximo posible esta relación.

El parámetro λ lo calcularemos mediante la siguiente fórmula:

$$\lambda=\frac{n}{\sigma_o^2}(\Delta_I+\mu_o)^2$$

en donde

$$\Delta_I=\frac{\mu_o\sigma_I^2-\mu_I\sigma_o^2}{\sigma_o^2-\sigma_I^2}$$

REGLA GENERAL DE DECISIÓN

La **regla general de decisión** no será estrictamente la obtenida mediante la aplicación del **lema de Jerzy NEYMAN - Egon PEARSON,** ya que en ella aparece la constante asociada a dicho lema $K_*(\alpha_1)$ siendo ésta desconocida. De ahí que, la regla de decisión la enunciamos del siguiente modo:

Para una muestra de media $\bar{x}_n$ (valor particular de $\bar{X}_n$)
y de varianza s_n^2 (valor particular de S_n^2) susceptible de ser extraida,
la hipótesis nula será rechazada o aceptada bajo la siguientes condiciones:

$$\text{Si } s_n^2+(\bar{x}_n+\Delta_1)^2\leq\frac{\sigma_0^2}{n}\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(\alpha_1)\text{ se acepta } H_1$$

$$\text{Si } s_n^2+(\bar{x}_n+\Delta_1)^2>\frac{\sigma_0^2}{n}\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(\alpha_1)\text{ se acepta } H_0$$

Ni que decir tiene que para tomar la decisión de aceptación o rechazo de la hipótesis nula tenemos que disponer de los valores numéricos asociados a la muestra que extraigamos de la variable aleatoria de **LAPLACE-GAUSS.**

En el caso hipotético de que el investigador no disponga de datos, le recomendamos que proceda a la realización de una simulación de la variable aleatoria de **LAPLACE-GAUSS** utilizando el método de **G.E.P.BOX- M.E.MULLER** [5] o bien el de **G.MASAGLIA** [21].

SEGUNDA SITUACIÓN HIPOTÉTICA

Puesto que el procedimiento para la obtención tanto del **tamaño de la muestra** como de la **regla general de decisión** resulta análogo a la **primera situación hipotética,** para no ser reiterativos, nos limitaremos en exponer el resultado de los desarrollos, que es el siguiente:

TAMAÑO DE LA MUESTRA

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} = \frac{\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(1-\alpha_2)}{\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(1-\eta)}$$

$$\lambda = \frac{n}{\sigma_0^2}(\Delta_2 + \mu_0)^2$$

$$\Delta_2 = \frac{\mu_1\sigma_0^2 - \mu_0\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}$$

Tomaremos aquel n que verifique lo máximo posible esta relación.

REGLA GENERAL DE DECISIÓN

Si $s_n^2 + (\bar{x}_n + \Delta_2)^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n} \overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(1-\alpha_2)$ se acepta H_1

Si $s_n^2 + (\bar{x}_n + \Delta_2)^2 < \frac{\sigma_0^2}{n} \overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(1-\alpha_2)$ se acepta H_0

APLICACIÓN

Sea X una variable aleatoria que representa el rendimiento de un proceso productivo.

Sabemos, por experiencia, que la variable aleatoria X sigue la **Ley de LAPLACE-GAUSS**:

$$X \hookrightarrow LG(\mu, \sigma^2)$$

Si nos atenemos a las restricciones resultantes de la toma en consideración de determinadas verificaciones empíricas, proponemos la realización de un test de hipótesis simple para la hipótesis nula:

$$H_o : \mu = 2$$
$$\sigma^2 = 3$$

frente a la hipótesis alternativa:

$$H_1 : \mu = 1$$
$$\sigma^2 = 2$$

Así pues, a tal efecto, nos disponemos a extraer de X una muestra aleatoria simple de tamaño pequeño, para así de verificar si la muestra es compatible con la hipótesis nula.

Finalmente, el propio investigador puede establecer que en su experimento tanto el **nivel de significación** como la **potencia del test** deben ser 0,28 y 0,70 respectivamente.

A partir de las hipótesis distribucionales y no distribucionales establecidas, pretendemos determinar:

1. El **tamaño de la muestra**
2. El **umbral crítico de decisión.**

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1. TAMAÑO DE LA MUESTRA

Haciendo uso de la fórmula ya expuesta en la primera situación hipotética, estamos ahora en condiciones de poder construir tanto la tercera columna como la cuarta,. El proceso de construcción de la tabla se detendrá cuando el valor de la quinta columna sea igual o casi igual a 1,5.

En nuestro caso concreto, tal como mostramos a continuación en la tabla adjunta, el n = 7.

n	λ	$\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(0{,}70)$	$\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(0{,}28)$	$\dfrac{\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(0{,}70)}{\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(0{,}28)}$
01	03	05,0920	01,3340	3,8171
02	06	09,9681	04,3907	2,2703
03	09	14,6160	07,6801	1,9031
04	12	19,1554	11,0849	1,7281
05	15	23,6276	14,5625	1,6225
06	18	28,0529	18,0914	1,5506
07	**21**	**32,4430**	**21,6590**	**1,4979**
08	24	36,8054	25,2570	1,4572

2. UMBRAL CRÍTICO DE DECISIÓN

Haciendo uso de la fórmula ya expuesta en la primera situación hipotética, podemos calcular el **umbral crítico de decisión**:

$$K^{I}(0,28)=9,2824$$

Por consiguiente, si con las datos provenientes de una muestra aleatoria simple de tamaño 7 calculamos su media y su varianza, podemos determinar lo siguiente:

$$s_7^2+(\bar{x}_7+1)^2$$

Finalmente, concluiremos que si el valor proveniente del cálculo de esta cantidad es menor o igual a la del **umbral crítico de decisión**, aceptamos la hipótesis nula; es decir, la muestra es compatible con la hipótesis nula.

ACLARACIONES DE LAS NOTACIONES MAS RELEVANTES

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$$

α : nivel de significación

α_1 : nivel de significación

[test de hipótesis unilateral a la izquierda]

$$[\alpha=\alpha_1+\alpha_2;\alpha_2=0]$$

α_2 : nivel de significación
[test de hipótesis unilateral a la derecha]

$$[\alpha=\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1=0]$$

$$K^{I}(\alpha_1)$$

Umbral crítico de decisión
[test de hipótesis unilateral a la izquierda]

$$K^{D}(\alpha_2)$$

Umbral crítico de decisión
[test de hipótesis unilateral a la derecha]

$$K_*(\alpha_1) \text{ y } K_*(\alpha_2)$$

Constantes del lema de Jerzy NEYMAN-Egon PEARSON

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \mu_0, \sigma_0^2\right)$$

Primera función de verosimilitud
asociada a la hipótesis nula

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$\sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \mu_1, \sigma_1^2\right)$$

Primera función de verosimilitud
asociada a la hipótesis alternativa

$$H_1 : \mu = \mu_1$$
$$\sigma^2 = \sigma_1^2$$

$$V = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow LG(0,1)$$

La variable aleatoria V sigue
la Ley de LAPLACE-GAUSS (0,1)

$$W = \frac{n\, S_n^2}{\sigma_0^2} \hookrightarrow \chi^2_{n-1}$$

La variable aleatoria W sigue
la Ley χ^2_{n-1} de Helmert (1876)

$$\overset{-1}{F}_{LG(0,1)}(\delta)$$

Función inversa de la función de distribución
de la variable aleatoria de LAPLACE-GAUSS[0,1]
para un area igual a $\delta : \delta \in [0,1]$

$$\overset{-1}{F}_{\chi^2_n}(\delta)$$

Función inversa de la función de distribución
de la variable aleatoria χ^2_n de Helmert (1876)
para un area igual a $\delta : \delta \in [0,1]$

$$\overset{-1}{F}_{\chi^2_{n;\lambda}}(\delta)$$

Función inversa de la función de distribución
de la variable aleatoria $\chi^2_{n;\lambda}$ para un area igual
a $\delta : \delta \in [0,1]$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ABBOUD, N., AUDROING, J. F. (1989): Probabilités et inférence statistique. Editions Nathan, pp. 261-288.

[2] ARANDA GALLEGO, J., GOMEZ GARCIA, J. (1992): Fundamentos de Estadística para Economía y Administración. PPU, SA, pp. 162-163.

[3] ARNAIZ VELLANDO, G. (1978): Introducción a la Estadística Teórica. 3ª Edición Editorial Lex Nova, pp. 238-243.

[4] BAILLE, A., BARRA, J. R. (1969): Problèmes de Statistique Mathematique. Dunod, pp. 123-126.

[5] BOX, G. E. P., MULLER, M. E. (1958): A note on the generation of random normal derivates. Ann. Math. Statist., 29, pp. 610-611.

[6] CALOT, G. (1967): «Significatif ou non significatif? Réflexions à propos de la théorie et de la pratique des tests statistiques». Revue de Statistique Appliquée, vol XV, nº 1, pp. 46-47.

[7] DACUHNA-CASTELLE, D., REVUZ, D., SCHREIBER, M. (1970): Recueil de problèmes de calcul des probabilités. Préface du Pr. A. TORTRAT. Deuxième edition revue et augmentée. Masson et cie, Editeurs. 120, Boulevard Saint-Germain, Paris VI, pp. 107-125.

[8] DACUHNA-CASTELLE, D., DUFLO, M. (1982): Exercices de probabilités et statistiques. 1: Problèmes à temps fixe. Masson.

[9] DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA, Fco. J. (1993): Formulaciones de interés en la Estadística Aplicada. Registro Propiedad Intelectual de Madrid. Solicitud núm:14. 000, pp. 92-100, 111-112, 212-228, 570-573.

[10] DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA, Fco. J. (1995): Un estudio de la ley de Vilfredo Federico Dámaso Pareto (1848-1923). Ediciones UEM-CEES.

[11] DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA, Fco. J. (1996): Un estudio de la ley de W. Weilbull. Ediciones UEM-CEES.

[12] DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA, Fco. J. (1997): La variable aleatoria ji-cuadrada no-centrada y sus aplicaciones en la Estadística Inferencial Paramétrica. Conferencia impartida en la UEM-CEES.

[13] DROESBEKE, J-J., TASSI, Ph. (1990): Histoire de la Statistique. Presses Universitaires de France. Collection Que sais-je? núm 2527.

[14] DUDEWICZ, E, J., MISHRA, S. N. (1988): Modern Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc, p. 141.

[15] DUMAS DE RAULY, D. (1966): L'estimation statistique. Préface de Daniel DUGUÉ. Gauthier-Villars. Paris, pp. 77-81.

[16] FIX. E (1949): Tables of noncentral chi-2. Univ. of. California Publications in Statistics.

[17] FOURGEAUD, C., FUCHS, A. (1967): Statistiques. Préface de R. FORTET. Dunod, pp. 97-99.

[18] LECOUTRE, B., POITEVINEAU, J. (1995): Programme d'analyse des comparaison (PAC), version 1. 5. Logiciel édité et distribué par CISIA, 1 avenue Herbillon, 94160 Saint Mandé. France.

[19] LEGAIT, S., TASSI, Ph. (1990): Théorie des probabilités en vue des applications statistiques. Editions Technip. 27 rue Giroux 75737 Paris Cedex, pp. 161-163.

[20] MANOUKIAN, E. B. (1986): Guide de Statistique Appliquée. Hermann, 293 rue Lecourbe, 75015 Paris, p. 42.

[21] MARSAGLIA, G. (1968): Randon numbers fall mainly in the planes. Proc. Nat. Acad. Sci, 61, pp. 25-28.

[22] MONTFORT, A. (1980): Cours de probabilités. Annexe de Philippe TASSI. 2ª Edition. Economica, pp. 197-198.

[23] OWEN, D. B. (1962): Handbook of statistical tables. Reading Massachusetts. Addison-Wesley Publiching Company, Inc. London Pergamon Press, pp. 60-62.

[24] PATNAIK, P. B. (1949): «The noncentral chi-squared and F-distributions and their applications». Biometrika, 36, pp. 202-232.

[25] PEARSON, E. S. (1959): «Note on an approximation to the distribution of noncentral chi-squared». Biometrika, 46, p. 364.

[26] SEBER, G. A. (1963): «The noncentral chi-squared and beta distributions». Biometrika, 50, pp. 542-544.

[27] SIEGEL, A. F. (1979): «The noncentral chi-squared distribution with zero degrees of freedom and testing for uniformity». Biometrika, 66, 2, pp. 381-6.

[28] TASSI, Ph. (1985): Méthodes Statistiques. Economica, pp. 32-33.

[29] TIKU, M. L. (1965): «Laguerre series forms of noncentral chi-squared and F distributions». Biometrika, 52, 3 and 4, pp. 415-427.

[30] VALLECILLOS JIMENEZ, A. (1996): Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas. Editorial Comares.

[31] VOGT, A. (1977): Méthodes Statistiques-I. Résume de cours. Exercices corrigés. Editions Sirey.

[32] VOGT, A. (1978): Méthodes Statistiques-II. Résume de cours. Exercices corrigés. Editions Sirey.

[33] WINER, B. J. (1962): Statistical Principles in Experimental Design. McGraw-Hill Kogakusha, LSD, pp. 824-828.

[34] ZACKS, S. (1981): Parametric Statistical Inference. Basic Theory and Modern Approaches. Pergamon Press.

[35] ZOROA ALONSO, N., ZOROA TEROL, P. (1991): Introducción a la probabilidad y la medida (I). PPU, SA, pp. 267-269.